# Megoldások

**1. Egyszerűsítsd a következő törteket!** $\frac{77!}{3!\cdot 74!}$ $\frac{n!}{(n-2)!}$ $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$

Megoldás:
Bontsuk fel a faktoriálist a számlálóban és nevezőben is, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{77!}{3!\cdot 74!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 74\cdot 75\cdot 76\cdot 77}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 74}=\frac{75\cdot 76\cdot 77}{1\cdot 2\cdot 3}=25\cdot 38\cdot 77=73\,150$$

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)}=(n-1)\cdot n=n^2-n$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)}=\frac{1}{n-1}$$

**2. Hány tízjegyű szám van a kettes számrendszerben?**

Megoldás:
Rekeszes módszerrel: az első helyre csak egy számjegy (1 – es), a többi helyre pedig két – két számjegy kerülhet (0 és 1), így a megoldás a következő: $1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=512$.

A számjegyek kiválasztását ismétléses variációval számíthatjuk ki: $V_2^{9,ism}=2^9=512$.

**3. Hányféleképpen érkezhet be a célba 5 versenyző, ha nincs holtverseny?**

Megoldás:
Rekeszes módszerrel: az első helyre 5, a másodikra 4, a harmadikra 3, a negyedikre 2, az ötödikre pedig 1 ember választható. Mivel ezek a kiválasztások függnek egymástól, ezért a megoldás: $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.

A versenyzők sorba érkezését ismétlés nélküli permutációval számíthatjuk ki: $P_5=5!=120$.

**4. Hányféleképpen ülhet le 4 ember egy kör alakú asztalhoz?**

Megoldás:
Az emberek sorrendjét ciklikus permutációval számíthatjuk ki: $P_4^{ciklikus}=(4-1)!=3!=6$.

**5. Hányféleképpen rakhatunk sorba 3 kék, 4 zöld és 1 piros labdát?**

Megoldás:
A labdák sorrendjét ismétléses permutációval számíthatjuk ki: $P_8^{3,4,1} = \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} = 280$.

**6. Mennyi különböző dobássorozat lehetséges, amiben 3 fej és 5 írás található?**

Megoldás:
A dobássorozatok számát ismétléses permutációval számíthatjuk ki: $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$.

**7. Hány (nem feltétlenül értelmes) 7 betűs szó képezhető az $A, A, A, B, B, C, D$ betűkből?**

Megoldás:
Mivel minden betűt felhasználunk, így az összes lehetőség számát ismétléses permutációval számíthatjuk ki: $P_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$.

**8. Hányféleképpen sorsolhatunk ki $20$ ember között 1 Tv - t, 1 kerékpárt és 1 autót, ha egy ember több tárgyat is nyerhet?**

Megoldás:
Mivel különböző tárgyakat sorsolunk ki, ezért a kiválasztás során számít a sorrend, így az összes lehetőség számát ismétléses variációval számíthatjuk ki: $V_{20}^{3,ism} = 20^3 = 8000$.

**9. Mennyi 3 színű zászlót készíthetünk 5 különböző színből, ha egy színt csak egyszer használhatunk fel?**

Megoldás:
Mivel a zászló készítés során a színek sorrendje számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli variációval számíthatjuk ki: $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$.

**10. Mennyi háromjegyű szám képezhető az $1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek ismétlődhetnek?**

Megoldás:
Mivel a számképzés során a sorrend számít, így az összes lehetőség számát ismétléses variációval számíthatjuk ki: $V_4^{3,ism} = 4^3 = 64$.

**11. Egy pályázatra 20 pályamunka érkezett és 5 kategóriában hirdetnek $1-1$ győztest. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy pályamunka csak egy kategóriában győzhet?**

Megoldás:
Mivel különböző kategóriákról van szó, ezért a kiválasztásnál számít a sorrend, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli variációval számíthatjuk ki: $V_{20}^{5}=\frac{20!}{(20-5)!}=1\,860\,480$.

**12. Egy futóverseny döntőjébe 8 - an jutnak be. Hányféleképpen alakulhat a dobogó, ha nincs holtverseny?**

Megoldás:
Mivel a dobogósok kiválasztásánál a sorrend számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli variációval számíthatjuk ki: $V_{8}^{3}=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=336$.

**13. Egy 7 elemű halmaznak mennyi 3 elemű részhalmaza van?**

Megoldás:
Mivel az elemek kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $C_{7}^{3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$.

**14. Hányféleképpen tölthetjük ki az ötös lottó szelvényt (90 számból húznak 5 - öt)?**

Megoldás:
Mivel a számok kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $C_{90}^{5}=\binom{90}{5}=\frac{90!}{(90-5)!\cdot 5!}=\frac{90!}{85!\cdot 5!}=43\,949\,268$.

**15. Egy 32 - es létszámú osztályban klubdélutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy ugyanolyan tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha egy tanuló több tárgyat is elnyerhet?**

Megoldás:
Mivel a nyeremények egyformák, ezért a kiválasztás során a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétléses kombinációval számíthatjuk ki:

$$C_{32}^{4,ism}=\binom{32+4-1}{4}=\binom{35}{4}=\frac{35!}{(35-4)!\cdot 4!}=\frac{35!}{31!\cdot 4!}=52\,360.$$

**16. Adott a síkon $15$ pont, melyek közül semelyik $3$ nem illeszkedik egy egyenesre. A $15$ pont mennyi háromszöget határozhat meg?**

Megoldás:
Mivel a pontok kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $C_{15}^{3} = \binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = 455$.

**17. Hányféleképpen sorsolhatunk ki $10$ diák között $5$ német, $3$ francia és $2$ holland utat, ha egy diák csak egy utat kaphat?**

Megoldás:
Mivel a sorsolásnál a $10$ diákból mindenkit kiválasztunk egy - egy úthoz, így sorba rendezéssel, ismétléses permutációval számíthatjuk ki az összes lehetőség számát: $P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = 2520$.

**18. Hány ötszöget határoznak meg egy szabályos $20$ – szög csúcsai?**

Megoldás:
Mivel a csúcsok kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $\binom{20}{5} = 15504$.

**19. Egy pizzériában $6$ – féle hamburgert árulnak, mindegyiket $1000\, Ft$ – ért. Hányféleképpen költhetünk el $10\,000\, Ft$ – ot hamburgerre, ha nemcsak egyféle hamburgert szeretnénk hazavinni?**

Megoldás:
Mivel a hamburgerek kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétléses kombinációval számíthatjuk ki: $C_{6}^{10,ism} = \binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{(15-10)! \cdot 10!} = 3003$.

**20. Hány részhalmaza van egy $4$ elemű halmaznak?**

Megoldás:
A halmaznak $\binom{4}{0}$ darab $0$ elemű; $\binom{4}{1}$ darab $1$ elemű; $\binom{4}{2}$ darab $2$ elemű; $\binom{4}{3}$ darab $3$ elemű és $\binom{4}{4}$ darab $4$ elemű részhalmaza van.

Ezek alapján a megoldás: $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

**21. Egy kutyakiállításra $10$ - en neveztek be egy – egy kutyával. Hányféleképpen állhatnak sorba, ha két kutya nem kerülhet egymás mellé?**

Megoldás:
Először tekintsünk minden kutyát a gazdájával együtt egy „blokknak”, így a $10$ „blokkot” összesen $10!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy $2$ - féleképpen állhatnak fel a sorba: $KGKGKGKGKG$ vagy $GKGKGKGKGK$.

Ezek alapján a megoldás: $2 \cdot 10! = 7\,257\,600$.

**22. Hányféleképpen állhat osztályfőnöke előtt kettesével egy oszlopban a $18$ fiúból és $18$ lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?**

Megoldás:
Először állítsuk sorba egymás mögé a lányokat és fiúkat, így összesen $18! \cdot 18!$ pár keletkezik.

Ezt követően a párokon belül a diákok helyét megcserélhetjük.

Ezek alapján a megoldás: $18! \cdot 18! \cdot 2^{18}$.

**23. Van $2$ különböző könyvünk matematikából, $3$ történelemből és $4$ magyarból. Hányféleképpen helyezhetjük el ezeket a polcon, ha az egyforma témájú könyveket egymás mellé szeretnénk elhelyezni?**

Megoldás:
Először tekintsük az azonos tulajdonságú könyveket egy „blokknak”, így a $3$ „blokkot” összesen $3!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően a „blokkokon” belül is megcserélhetjük a könyveket.

Ezek alapján a megoldás: $2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! = 1728$.

**24. Három házaspár színházba ment és egymás mellé vettek jegyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a házastársak egymás mellett foglalnak helyet?**

Megoldás:
Először tekintsünk minden házaspárt egy – egy „blokknak”, így a $3$ „blokkot” összesen $3!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően a „blokkokon” belül is megcserélhetjük a házastársakat.

Ezek alapján a megoldás: $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 48$.

**25. Egy csoportba 7 fiú és 7 lány jár. Felsorakoztatjuk őket kettes oszlopba, egyik oszlopba a lányok, másikba a fiúk állnak. Hányféleképpen állhatnak párba?**

Megoldás:
Először állítsuk sorba egymás mögé a lányokat és fiúkat, így összesen $7! \cdot 7!$ pár keletkezik.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy az oszlop $2$ - féleképpen állhat össze: $FL$ vagy $LF$.

Ezek alapján a megoldás: $7! \cdot 7! \cdot 2 = 50\,803\,200$.

**26. Moziba megy 4 fiú (Attila, Csaba, Elemér, Géza) és 4 lány (Bea, Dia, Flóra, Helga). Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha**

***a)*** **fiúk és lányok felváltva ülnek?**

***b)*** **Attila és Bea egymás mellé szeretne ülni?**

***c)*** **Attila, Csaba és Elemér egymás mellé szeretne ülni?**

***d)*** **Attila a Bea mellé, Csaba a Dia mellé szeretne ülni?**

***e)*** **Dia és Géza nem szeretne egymás mellé ülni?**

***f)*** **Helga nem szeretne az első helyen ülni?**

***g)*** **a 4 lány egymás mellé szeretne ülni?**

Megoldás:

a) Mivel 4 fiú és 4 lány van, ezért kétféleképpen ülhetnek le: $FLFLFLFL$ vagy $LFLFLFLF$.

A 4 fiú és a 4 lány külön - külön $4!$ – féleképpen ülhet le egymás mellé.

Ezek alapján a megoldás: $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1\,152$.

b) Először tekintsük Attilát és Beát, illetve a többieket külön - külön egy - egy „blokknak”, így a 7 „blokkot” összesen $7!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkon” belül Attila és Bea $2!$ - féleképpen ülhet le: $AB$ vagy $BA$.

Ezek alapján a megoldás: $2! \cdot 7! = 10\,080$.

c) Először tekintsük a 3 fiút, illetve a többieket külön – külön egy - egy „blokknak”, így a 6 „blokkot” összesen 6! – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkon” belül a 3 fiú 3! - féleképpen ülhet le.

Ezek alapján a megoldás: $3! \cdot 6! = 4\,320$.

d) Először tekintsük a 2 párt, illetve a többieket külön – külön egy – egy „blokknak”, így a 6 „blokkot” összesen 6! – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkokon” belül a párok $2! - 2!$ – féleképpen ülhetnek le egymás mellé: $AB, BA$ és $CD, DC$.

Ezek alapján a megoldás: $2! \cdot 2! \cdot 6! = 2\,880$.

e) Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Az összes különböző leülések száma: 8!.

A kedvezőtlen esetek száma, amikor Dia és Géza egymás mellé ül, a *b)* részhez hasonlóan számíthatjuk ki: $2! \cdot 7!$.

Ezek alapján a megoldás: $8! - 2 \cdot 7! = 30\,240$.

f) Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Az összes különböző leülések száma: 8!.

A kedvezőtlen esetek számát, amikor Helga az első helyre ül, úgy számíthatjuk ki, hogy a másik 7 embert rakjuk sorba, vagyis ezeknek a száma: 7!.

Ezek alapján a megoldás: $8! - 7! = 35\,280$.

g) Először tekintsük a 4 lányt, illetve a többieket egy - egy „blokknak”, így az 5 „blokkot” összesen 5! – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkon” belül a 4 lány 4! - féleképpen ülhet le.

Ezek alapján a megoldás: $4! \cdot 5! = 2\,880$.

**27. Egy házaspár 3 baráttal hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz, ha a házaspár egymás mellett szeretne helyet foglalni?**

Megoldás:
Először tekintsük a házaspárt, illetve a 3 barátot külön – külön egy – egy „blokknak”, így a 4 „blokkot” kör mentén összesen $P_{4,ciklikus} = (4-1)! = 3! = 6$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkon” belül a házastársak 2 - féleképpen ülhetnek le: $FN$ vagy $NF$.

Ezek alapján a megoldás: $2 \cdot 6 = 12$.

**28. Egy kör alakú asztalhoz leül 5 házaspár.**

***a)*** **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a párosok egymás mellé szeretnének ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?**

***b)*** **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?**

Megoldás:

a) Először tekintsük a házaspárokat külön – külön egy – egy „blokknak”, így az 5 „blokkot” kör mentén $P_{5,ciklikus} = (5-1)! = 4! = 24$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy az első helyre 2 – féleképpen ülhetnek le: F vagy L.

Ezek alapján a megoldás: $24 \cdot 2 = 48$.

b) Ebben az esetben az összes házastárs helyett cserélhet a párjával.

Ezek alapján a megoldás: $24 \cdot 2^5 = 768$.

**29. A 6 - os lottón (45 számból húzunk le 6 - ot) hányféleképpen lehet 4 találatunk?**

Megoldás:
A 6 kihúzott számból 4 - et $\binom{6}{4}$ – féleképpen választhatunk ki, míg a két rossz tippünket a ki nem húzott 39 számból $\binom{39}{2}$ – féleképpen húzhatjuk le.

Mivel ezek függnek egymástól, vagyis minden jó 4 számhoz tartozik 2 rossz, így a megoldás: $\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} = 11\,115$.

**30. Egy pályázatra 30 pályamű érkezett, melyet 18 férfi és 12 nő adott be. A díjazáskor 1 darab első, 2 darab második és 3 darab harmadik helyezettet állapítanak meg.**

***a)* Hányféleképpen történhet a díjazás, ha egy ember csak egy díjat nyerhet?**

***b)* Hányféleképpen történhet a díjazás, ha az első és két második helyezett is nő?**

Megoldás:

a) Az első helyezettet $\binom{30}{1}$ – féleképpen választhatjuk ki. A második helyezetteket a maradék 29 emberből $\binom{29}{2}$ – féleképpen, a harmadik helyezetteket pedig a kimaradt 27 emberből $\binom{27}{3}$ – féleképpen választhatjuk ki.

Mivel a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{30}{1} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{27}{3} = 35\,626\,500$.

b) Az első helyezettet a 12 nőből $\binom{12}{1}$ – féleképpen választhatjuk ki. A második helyezetteket a megmaradó 11 nőből $\binom{11}{2}$ – féleképpen, a harmadik helyezetteket pedig a kimaradt 27 emberből $\binom{27}{3}$ – féleképpen választhatjuk ki.

Mivel a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{12}{1} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{27}{3} = 1\,930\,500$.

**31. A BKV járművein a jegyeken 9 mező található 1 - től 9 - ig számozva. A lyukasztókat úgy állítják be, hogy 2, 3 vagy 4 mezőt lyukasszanak ki. Hányféleképpen állíthatják be a lyukasztókat?**

Megoldás:
Az első esetben 2 számot kell kiválasztanunk, ezt $\binom{9}{2} = 36$ – féleképpen tehetjük meg. A második esetben $\binom{9}{3} = 84$ – féleképpen, a harmadik esetben pedig $\binom{9}{4} = 126$ – féleképpen állíthatjuk be a lyukasztót.

Mivel ezek az esetek egymástól függetlenek, így a megoldás: $36 + 84 + 126 = 246$.

**32. Egy 12 fős katonai osztagból 4 irányba küldenek járőröket. Egy járőregyüttest 2 katona alkot. Hány lehetőség van a járőrök kiválasztására?**

Megoldás:
Az első párost $\binom{12}{2}$ – féleképpen, a másodikat a maradék emberekből $\binom{10}{2}$ – féleképpen, a harmadikat $\binom{8}{2}$ – féleképpen, az utolsó párt pedig $\binom{6}{2}$ – féleképpen választhatjuk ki.

Mivel a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 1\,247\,400$.

**33. Egy fővárosi, egy debreceni és egy külföldi barátunknak szeretnénk két – két képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az újságárusnál összesen 7 – féle képeslap kapható?**

Megoldás:
Minden barátunknak 7 darab képeslapból választunk ki 2 – t úgy, hogy a sorrend nem számít.

Ezek alapján a megoldás: $\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} = 9261$.

**34. Egy 34 fős (21 fiú és 13 lány) osztályt 5 diák képvisel egy ünnepségen.**

***a)* Hányféleképpen választhatják ki az 5 tagú küldöttséget a tanulók?**

***b)* Hányféleképpen választhatnak ki egy 3 fiúból és 2 lányból álló küldöttséget?**

Megoldás:

a) Mivel a kiválasztott diákok esetében a kiválasztás sorrendje nem számít, így a megoldást ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki:

$C_{34}^{5} = \binom{34}{5} = \frac{34!}{29! \cdot 5!} = 278\,256$.

b) A 3 fiút $\binom{21}{3}$ – féleképpen, a 2 lányt pedig $\binom{13}{2}$ – féleképpen választhatjuk ki.

Mivel a két kiválasztás függ egymástól, vagyis minden egyes fiú hármashoz párosíthatunk egy lány párost, így a megoldás: $\binom{21}{3} \cdot \binom{13}{2} = 103\,740$.

**35. Egy 18 fős csoport kirándulni megy és 6 ágyas szobákban szállnak meg. Hányféleképpen foglalhatják el a szobákat, ha a szobák különbözőek? (A szobákon belüli elhelyezkedésekre nem vagyunk tekintettel.)**

Megoldás:
Az első szobába $\binom{18}{6}$ – féleképpen, a másodikba a maradék emberekből $\binom{12}{6}$ – féleképpen, a harmadikba pedig $\binom{6}{6}$ – féleképpen választhatjuk ki a lakókat.

Mivel a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} = 17\,153\,136$.

**36. Egy raktárban 100 darab készülékből 8 darab hibás. Hányféleképpen lehet 6 készüléket kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott készülékek között**

***a)* ne legyen egy hibás sem?**

***b)* mind hibás legyen?**

***c)* legalább 4 hibás legyen?**

***d)* legfeljebb 5 hibás legyen?**

Megoldás:

a) Ebben az esetben a 6 készüléket a 92 hibátlanból kell kiválasztanunk úgy, hogy a sorrend nem számít. Ezek alapján a megoldás:

$$C_{92}^{6} = \binom{92}{6} = \frac{92!}{(92-6)! \cdot 6!} = \frac{92!}{86! \cdot 6!} = 713\,068\,356.$$

b) Ebben az esetben a 6 készüléket a 8 hibásból kell kiválasztanunk úgy, hogy a sorrend nem számít. Ezek alapján a megoldás:

$$C_{8}^{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

c) Ebben az esetben 4,5 vagy 6 hibás készülék lehet a kiválasztottak között.

Az első esetben a 8 hibásból választunk ki 4 - et és a 92 hibátlanból pedig 2 - t, s mivel ezek a kiválasztások függnek egymástól, így ezt $\binom{8}{4} \cdot \binom{92}{2}$ – féleképpen tehetjük meg.

A másik két esetet hasonlóan számíthatjuk ki, s mivel ez a 3 eset külön – külön egymástól független ágak, így a megoldás:

$$\binom{8}{4} \cdot \binom{92}{2} + \binom{8}{5} \cdot \binom{92}{1} + \binom{8}{6} \cdot \binom{92}{0} = 298\,200.$$

d) Ebben az esetben 0,1,2,3,4 vagy 5 hibás készülék lehet a kiválasztottak között.

Külön – külön most is kiszámíthatjuk az egyes eseteket, azonban itt kevesebb számolással is eljuthatunk a megoldáshoz: először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségeket.

A 100 termékből a 6 készüléket összesen $\binom{100}{6}$ – féleképpen választhatjuk ki.

A számunkra kedvezőtlen esetek száma, amikor mind hibás: $\binom{8}{6} \cdot \binom{92}{0}$.

Ezek alapján a megoldás: $\binom{100}{6} - \binom{8}{6} \cdot \binom{92}{0} = 1\,192\,052\,372.$

**37. Egy dobozban 30 csavar közül 10 selejtes. A 30 csavarból 7 - et kivéve, hány esetben lesz közöttük**

***a)*** **legalább 6 selejtes?**

***b)*** **legfeljebb 5 selejtes?**

Megoldás:

a) Ebben az esetben 6 vagy 7 selejtes lehet a kiválasztottak között.

Az első esetben a 10 selejtesből választunk ki 6 - ot, a 20 jóból pedig 1 - et, s mivel ezek a kiválasztások függnek egymástól, így ezt $\binom{10}{6} \cdot \binom{20}{1}$ – féleképpen tehetjük meg.

A második esetben a 10 selejtesből választanunk ki 7 - et, a 20 jóból pedig 0 – t, s mivel ezek a kiválasztások függnek egymástól, így ezt $\binom{10}{7} \cdot \binom{20}{0}$ – féleképpen tehetjük meg.

Mivel ez a 2 eset külön – külön egymástól független ágak, így a megoldás:

$\binom{10}{6} \cdot \binom{20}{1} + \binom{10}{7} \cdot \binom{20}{0} = 4\,320.$

b) Ebben az esetben $0,1,2,3,4$ vagy 5 selejtes készülék lehet a kiválasztottak között.

Külön – külön most is kiszámíthatjuk az egyes eseteket, azonban itt kevesebb számolással is eljuthatunk a megoldáshoz: először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségeket.

A 30 csavarból 7 – et összesen $\binom{30}{7}$ – féleképpen választhatunk ki.

A számunkra kedvezőtlen esetek száma, amikor 6 vagy 7 selejtes van a kiválasztott csavarok között: $\binom{10}{6} \cdot \binom{20}{1} + \binom{10}{7} \cdot \binom{20}{0}$.

Ezek alapján a megoldás: $\binom{30}{7} - \left[\binom{10}{6} \cdot \binom{20}{1} + \binom{10}{7} \cdot \binom{20}{0}\right] = 2\,031\,480.$

**38. Hány különböző módon tudunk egy 20 fős társaságból két 8 fős csapatot létrehozni, akik focimeccset játszanak egymás ellen? (A csapatban betöltött pozíció nem számít.)**

Megoldás:

Az első csapat játékosait $\binom{20}{8}$ – féleképpen, a második csapatét pedig a megmaradt játékosokból $\binom{12}{8}$ – féleképpen választhatjuk ki. Ebben az esetben minden csapatot kétszer számoltunk.

Ezek alapján a megoldás: $\frac{\binom{20}{8} \cdot \binom{12}{8}}{2} = 31\,177\,575.$

**39. Egy dobozban $15$ cédula van, amelyekre rendre az $1, 2, \ldots, 14, 15$ számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után 5 cédulát visszatevés nélkül.**

***a)* Hány olyan eset adódhat, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?**

***b)* Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5 - nél?**

Megoldás:

a) Mivel minden kihúzott számötös esetén csak egy adott sorrendjük felel meg a feladatnak, ezért a sorrend a húzásnál nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $C_{15}^{5} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3\,003$.

b) Mivel a kihúzott legkisebb szám 5 - nél nagyobb, ezért csak 10 cédulából húzhatunk, s a sorrend ebben az esetben sem számít. Ezek alapján a megoldás: $C_{10}^{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$.

**40. Hányféleképpen rakhatunk le egymás mellé 5 piros és 8 kék golyót úgy, hogy 2 piros golyó nem kerülhet egymás mellé?**

Megoldás:
A piros golyókat 9 helyre rakhatjuk le, mert kerülhet előre és hátulra, illetve a 8 kék golyó közé 7 helyre ($PKPKPKPKPKPKPKPKP$).

Mivel a golyók azonosak, a 9 helyből az 5 kiválasztásánál a sorrend nem számít, így az összes lehetőség számát ismétlés nélküli kombinációval számíthatjuk ki: $C_{9}^{5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$.

**41. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?**

Megoldás:
Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Mivel 5 darab páros számjegy áll rendelkezésünkre, így összesen $V_{5}^{3,ism} = 5^3 = 125$ darab számhármas képezhető.

Ebből azok a kedvezőtlenek, amelyek első számjegye 0, vagyis $V_{5}^{2,ism} = 5^2 = 25$ darab.

Ezek alapján a megoldás: $125 - 25 = 100$.

**42. Egy dobókockával háromszor dobunk, s az eredményeket leírjuk egymás mellé.**

***a)* Mennyi háromjegyű számot kaphatunk?**

***b)* Mennyi háromjegyű, páros számot kaphatunk?**

***c)* Mennyi háromjegyű, néggyel osztható számot kaphatunk?**

***d)* Mennyi háromjegyű, 9 - cel osztható számot kaphatunk?**

Megoldás:

a) A 6 lehetséges szám közül kell kiválasztanunk 3 - at úgy, hogy a számok ismétlődhetnek, és a sorrend számít. Ezek alapján a megoldás: $V_6^{3,ism} = 6^3 = 216$.

b) Mivel páros számokat tekintünk, ezért az utolsó számjegy csak $2, 4$, vagy $6$ lehet.

Az első kettő számjegy esetén pedig 6 számból választunk ki 2 - t úgy, hogy ezek ismétlődhetnek, és a sorrend számít, vagyis $V_6^2 = 6^2 = 36$ – féleképpen alakulhatnak.

Ezek alapján a megoldás: $3 \cdot 36 = 108$.

c) Egy szám akkor osztható néggyel, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható néggyel, vagyis a végződések a következők lehetnek: $12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64$.

Az első számjegy pedig 6 - féleképpen adódhat.

Ezek alapján a megoldás: $6 \cdot 9 = 54$.

d) Egy szám akkor osztható 9 - cel, ha a számjegyek összege osztható 9 – cel, vagyis csak a következő számhármasok jöhetnek szóba: $(1, 2, 6)$; $(1, 3, 5)$; $(1, 4, 4)$; $(2, 2, 5)$; $(2, 3, 4)$; $(3, 3, 3)$; $(6, 6, 6)$.

A három különböző számjegyből összesen $3! = 6$ darab számot, a két azonos számjegyet tartalmazó számhármasból összesen 3 darab számot, míg a három azonos számjegyből 1 darab számot tudunk képezni.

Ezek alapján a megoldás: $3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 26$.

**43. A bohémiai útlevelet $2$ betűvel és $5$ számmal jelölnek. Az első szám jelzi, hogy férfi vagy nő a tulajdonos, a második szám pedig azt, hogy a $7$ tartományból melyikben él. Hány útlevelet adhattak ki összesen, ha $20$ betűt használtak fel hozzájuk?**

Megoldás:
Az első számot $2$ - féleképpen, a másodikat $7$ – féleképpen, a másik három számot $10$ számjegyből pedig összesen $V_{10}^{3,ism} = 10^3 = 1000$ – féleképpen választhatjuk meg.

A $2$ betűt összesen $V_{20}^{2,ism} = 20^2 = 400$ – féleképpen választhatjuk meg.

Mivel a választások függnek egymástól, így a megoldás: $2 \cdot 7 \cdot 1000 \cdot 400 = 5\,600\,000$.

**44. Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?**

Megoldás:
Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Az $5$ számjegyet összesen $5!$ – féleképpen tehetjük sorba.

A számunkra kedvezőtlen esetek azok, amikor a $0$ számjegy áll az első helyen, mert így a számunk csak négyjegyű lesz. Ezen esetek száma: $4!$.

Ezek alapján a megoldás: $5! - 4! = 96$.

**45. Az $1, 2, \ldots, 14, 15$ számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben**

***a)* az $1, 2, 3$ számok csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?**

***b)* az $1, 2, \ldots, 9, 10$ számok egymás mellé kerülnek?**

Megoldás:

a) A számhármas csak egyféleképpen alakulhat: $(3, 2, 1)$. Tekintsük ezt a számhármast, illetve a többi számot külön – külön egy - egy „blokknak”, s így a $13$ „blokkot” kell sorba raknunk. Ezek alapján a megoldás: $13! = 6\,227\,020\,800$.

b) Tekintsük az egymás mellé kerülő $10$ számot, illetve a többi számot külön – külön egy - egy „blokknak”, így a $6$ „blokkot” összesen $6!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezt követően még azt kell figyelembe vennünk, hogy a „blokkokon” belül a $10$ darab számot $10!$ – féleképpen tehetjük sorba.

Ezek alapján a megoldás: $6! \cdot 10! = 2\,612\,736\,000$.

**46. Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2$ számjegyekből?**

Megoldás:
Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

A három számjegyből összesen $V_3^{5,ism} = 3^5 = 243$ darab számot képezhetünk.

A számunkra kedvezőtlen esetek azok, amikor a $0$ számjegy áll az első helyen, mert így a számunk csak négyjegyű lesz. Ezen esetek száma: $V_3^{4,ism} = 3^4 = 81$.

Ezek alapján a megoldás: $243 - 81 = 162$.

**47. Mennyi négyjegyű 5 - tel osztható számot képezhetünk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?**

Megoldás:
Egy szám akkor osztható 5 - tel, ha 0 - ra vagy 5 - re végződik.

Első esetben, ha a szám 0 - ra végződik, akkor a 6 számjegyből kell kiválasztanunk 3 - at, amit $V_6^{3,ism} = 6^3 = 216$ – féleképpen tehetünk meg. Ebből azonban ki kell vennünk azokat a számokat, amikor az első helyen is 0 áll, vagyis a maradék két helyre választunk a 6 számjegyből, amit $V_6^2 = 6^2 = 36$ – féleképpen tehetünk meg. Így összesen $216 - 36 = 180$ darab négyjegyű 0 - ra végződő szám képezhető.

Mivel az 5 - re végződő számokat hasonlóan számíthatjuk ki, ezért a megoldás: $2 \cdot 180 = 360$.

**48. Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből mennyi háromjegyű szám képezhető, amelyben szerepel legalább egy darab 5 - ös?**

Megoldás:
Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Az öt számjegyből összesen $V_5^{3,ism} = 5^3 = 125$ darab számot képezhetünk.

A számunkra kedvezőtlen esetek azok, amikor az 5 - ös számjegy nem szerepel a számban. Ezen esetek száma: $V_4^{3,ism} = 4^3 = 64$.

Ezek alapján a megoldás: $125 - 64 = 61$.

**49. A 4 - es és 5 - ös számjegyek felhasználásával hány 9 - cel osztható, nyolcjegyű páros szám készíthető?**

Megoldás:
Egy szám akkor osztható 9 - cel, ha a számjegyek összege osztható 9 - cel. Ez ebben az esetben csak akkor áll elő, ha 4 darab 4 - est és 4 darab 5 - öst használunk a számunkhoz. Mivel páros számról van szó, ezért az utolsó számjegy csak 4 - es lehet, így csak a megmaradó 7 számjegyet kell sorba raknunk.

Ezek alapján a megoldás: $P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.

**50. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben mindhárom páratlan számjegy szerepel legalább egyszer?**

Megoldás:
Két eset lehetséges: a 3 páratlan szám mellé vagy páros, vagy páratlan számot választhatunk. Mindkét esetben 3 számból választhatjuk ki a negyedik számjegyet.

Amennyiben páros számot választunk, akkor a 4 számot $P_4 = 4! = 24$ – féleképpen, míg páratlan szám választása esetén $P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Ezek alapján a megoldás: $3 \cdot 24 + 3 \cdot 12 = 108$.

**51. Mennyi nyolcjegyű, néggyel osztható számot képezhetünk a $0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2$ számjegyekből, ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel?**

Megoldás:
Egy szám akkor osztható néggyel, ha az utolsó kettő számjegyéből képzett szám osztható néggyel, vagyis a végződések a következők lehetnek: $00$; $12$; $20$.

Első esetben, ha $00$ - ra végződik a szám, akkor a maradék 5 darab 1 - est és 1 darab 2 - est kell sorba rendeznünk, amit összesen $P_6^{5,1} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$ – féleképpen tehetünk meg.

Második esetben, ha $12$ - re végződik a szám, akkor a maradék 2 darab 0 - t és 4 darab 1 - est kell sorba rendeznünk, amit $P_6^{2,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ – féleképpen tehetünk meg. Ebből azonban ki kell vennünk, amikor 0 áll elől, amiből $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$ darab van. Így összesen $15 - 5 = 10$ darab $12$ - re végződő szám képezhető.

Harmadik esetben, ha $20$ - ra végződik a szám, akkor a maradék 1 darab 0 - t és 5 darab 1 - est kell sorba rendeznünk, amit $P_6^{1,5} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6$ – féleképpen tehetünk meg. Ebből ki kell vennünk, amikor 0 áll elől, amiből 1 van. Így összesen $6 - 1 = 5$ darab $20$ - ra végződő szám képezhető.

Ezek alapján a megoldás: $6 + 10 + 5 = 21$.

**52. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?**

Megoldás
Tekintsük a következő eseteket: $6$ darab $6$ – osból $1$; $5$ darab $5$ – ösből és $1$ darab $1$ – esből $\frac{6!}{5!\cdot 1!}=6$; $4$ darab $4$ – esből és $2$ darab $2$ – esből $\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$; $3$ darab $3$ – asból, $2$ darab $2$ – esből és $1$ darab $1$ – esből pedig $\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}=60$ szám képezhető.

Ezek alapján a megoldás: $1+6+15+60=82$.

**53. Hány olyan 9 jegyű szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám?**

Megoldás:
A megfelelő számokban minden második számjegy 1 – es, s a fennmaradó számjegyek a 2,3,5,7 számokból kerülhetnek ki.

Amennyiben 1 – essel kezdődik a szám, akkor 5 darab 1 – es fog szerepelni benne, s a maradék 4 számjegy $4^4=256$ – féleképpen adódhat.

Amennyiben nem $1$ – essel kezdődik a szám, akkor $4$ darab $1$ – es fog szerepelni benne, s a maradék 5 számjegy $4^5=1024$ – féleképpen adódhat.

Mivel a két eset egymástól független ágak, így a megoldás: $256+1024=1280$.

**54. Egy $25$ tagú közösség 3 tagú vezetőséget választ: titkárt és két titkár helyettest. Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy Ági vezetőségi tag legyen?**

Megoldás:
Két eset lehetséges: Ági titkár, vagy helyettes lesz.

Amennyiben Ági titkár, akkor választanunk kell még mellé két titkár helyettest a megmaradó $24$ emberből, amit $\binom{24}{2}=276$ – féleképpen tehetünk meg.

Amennyiben Ági helyettes, akkor választanunk kell még egy titkárt és egy titkár helyettest, így a különböző pozíciók miatt, ezt $V_{24}^2=\frac{24!}{(24-2)!}=24\cdot 23=552$ – féleképpen tehetjük meg.

Mivel a két eset egymástól független ágak, így a megoldás: $276+552=828$.

**55. Egy $35$ fős osztályban kisorsolunk 7 különböző könyvet. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Éva kap könyvet, ha**

***a)*** **egy tanuló csak egy könyvet kaphat?**

***b)*** **egy tanuló több könyvet is kaphat?**

Megoldás:

a) Nagy Éva 7 – féleképpen kaphat könyvet.

Ezt követően a többieket $V_{34}^{6} = \frac{34!}{(34-6)!} = 968\,330\,880$ – féleképpen sorsolhatják ki.

Mivel a választások függnek egymástól, így megoldás: $7 \cdot 968\,330\,880 = 6\,778\,316\,160$.

b) Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

A 7 könyvet összesen $V_{35}^{7,ism} = 35^7$ – féleképpen sorsolhatják ki.

Ebből azok a kedvezőtlen esetek, ahol Éva nem kap könyvet. Ezen esetek száma: $34^7$.

Ezek alapján a megoldás: $35^7 - 34^7$.

**56. Egy ital automata 1, illetve 2 eurós érméket fogad el. Egy 6 euró értékű italt hányféleképpen fizethetünk ki az automatához állva?**

Megoldás:
A 6 eurót a következő módon fizethetjük ki: 6 darab 1 eurós; 3 darab 2 eurós; 4 darab 1 eurós és 1 darab 2 eurós; 2 darab 1 eurós és 2 darab 2 eurós érmével. Az első két esetben az érméket 1 - féleképpen, a harmadik esetben $P_5^{1,4,ism} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$ – féleképpen, míg a negyedik esetben $P_6^{2,4,ism} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ – féleképpen dobhatjuk a gépbe az érméket.

Mivel a négy eset egymástól független ágak, így a megoldás: $1 + 1 + 5 + 6 = 13$.

**57. Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) kiosztunk $3$ embernek $2-2$ lapot. Hány különböző kiosztás lehetséges?**

Megoldás:
Az első embernek 32 lapból, a másodiknak a megmaradó 30 - ból, s végül a harmadiknak a kimaradó 28 kártyából osztunk $2-2$ lapot úgy, hogy a sorrend egyik esetben sem számít.

Mivel ezek a kiosztások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{28}{2} = 81\,557\,280$.

**58. Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) hányféleképpen választhatunk ki 4 lapot úgy, hogy 1 darab ász és 3 darab zöld legyen a lapok között?**

Megoldás:
Két eset lehetséges: a zöld ász a kiválasztott lapok között szerepel, vagy sem.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a zöld ász a kiválasztott lapok között van. Ekkor a maradék 7 zöld kártyából kell még választanunk 2 - t és a fennmaradó 21 lapból pedig 1 - et, amit összesen $\binom{7}{2} \cdot \binom{21}{1} = 441$ – féleképpen tehetünk meg.

Ezt követően nézzük azt az esetet, amikor nincs a kiválasztott lapok között a zöld ász. Ekkor a maradék 7 zöld kártyából kell még választanunk 3 - at és a maradék 3 ászból pedig 1 - et, amit összesen $\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{1} = 105$ – féleképpen tehetünk meg.

Mivel a két eset egymástól független ágak, így a megoldás: $441 + 105 = 546$.

**59. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani**

***a)* 5 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között 2 ász és 1 király legyen?**

***b)* 8 lapot úgy, hogy ász és piros is legyen a kiválasztott lapok között?**

***c)* 8 lapot úgy, hogy legalább 1 zöld színű lap legyen a kiválasztottak között?**

Megoldás:

a) A pakliban levő 4 ászból 2 - t $\binom{4}{2}$ – féleképpen választhatunk ki, míg a 4 királyból 1 - et $\binom{4}{1}$ – féleképpen választhatunk ki. A fennmaradó 24 lapból pedig még választanunk kell 2 - t, amit $\binom{24}{2}$ – féleképpen tehetünk meg.

Mivel ezek a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{24}{2} = 6\,624$.

b) Összesen a 32 lapból $\binom{32}{8}$ – féleképpen választhatunk ki 8 lapot.

Ebből vegyük ki azt az esetet, amikor nincs ász a kiválasztottak között, ami $\binom{28}{8}$ – féleképpen adódhat, és azt az esetet, amikor nincs piros a kiválasztottak között, ami pedig $\binom{24}{8}$ – féleképpen adódhat.

Azonban azt a lehetőséget, amikor sem piros, sem ász nincs a választottak között, ami $\binom{21}{8}$ – féleképpen adódhat, mindkét esetben kivettük, így azt ismét számolnunk kell.

Ezek alapján a megoldás a következő: $\binom{32}{8} - \binom{28}{8} - \binom{24}{8} + \binom{21}{8} = 6\,878\,214$.

c) A 32 lapból összesen $\binom{32}{8}$ – féleképpen választhatunk ki 8 lapot. Ebből vegyük ki azt, amikor nincs zöld a kiválasztottak között, ami $\binom{24}{8}$ – féleképpen adódhat.

Ezek alapján a megoldás: $\binom{32}{8} - \binom{24}{8} = 9\,782\,829$.

**60. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros és két király?**

Megoldás:
Két eset lehetséges: a piros király a kiválasztott lapok között szerepel, vagy sem.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a piros király a kiválasztott lapok között van. Ekkor a maradék 7 piros kártyából kell még választanunk 1 – et, a megmaradt 3 királyból 1 – et, a fennmaradó 21 lapból pedig 3 - at, amit $\binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{21}{3} = 27\,930$ – féleképpen tehetünk meg.

Ezt követően nézzük azt az esetet, amikor nincs a kiválasztott lapok között a piros király. Ekkor a maradék 7 piros kártyából kell még választanunk 2 – t, a megmaradt 3 királyból 2 – t, a fennmaradó 21 lapból szintén 2 - t, amit $\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{2} = 13\,230$ – féleképpen tehetünk meg.

Mivel a két eset egymástól független ágak, így a megoldás: $27\,930 + 13\,230 = 41\,160$.

**61. Egy nyársra 6 étel darab fér fel úgy, hogy csirkemellből, szalonnából és hagymából választhatunk. Hányféleképpen állíthatjuk össze a nyársat, ha legfeljebb 3 hagymát szeretnénk rárakni? (Akár az is lehet, hogy egyféle étel lesz a nyárson.)**

Megoldás:
Először tekintsük az összes esetet, majd vegyük ki belőle a számunkra kedvezőtlen lehetőségek számát, s így megkapjuk a kérdésre a választ.

Az összes esetek száma: $V_3^{6,ism} = 3^6 = 729$.

A számunkra kedvezőtlen esetek a következők: amennyiben 4 hagymakarika kerül a nyársra, akkor $\binom{6}{4} \cdot 2^2 = 60$ – féleképpen készíthetjük el, ha 5 hagymakarika, akkor $\binom{6}{5} \cdot 2 = 12$ – féleképpen, s amikor mindegyik hagymakarika, akkor azt 1 – féleképpen.

Ebből adódik, hogy a kedevezőtlen esetek száma: $60 + 12 + 1 = 73$.

Ezek alapján a megoldás: $729 - 73 = 656$.

**62. Három fiú és két lány munkát keres. A városban három üzemben vesznek fel férfi munkaerőt, két bölcsőde hirdet felvételt nőknek és van még két üzlet, ahol férfiakat és nőket egyaránt alkalmaznának. Hányféleképpen helyezkedhet el az 5 fiatal, ha minden munkahelyen legalább 5 dolgozót tudnak alkalmazni?**

Megoldás:

A fiúknak összesen 5 munkahely áll rendelkezésre, vagyis a lehetséges elhelyezkedésük száma: $V_5^{3,ism} = 5^3 = 125$.

A lányoknak összesen 4 munkahely áll rendelkezésre, így a lehetséges elhelyezkedésük száma: $V_4^{2,ism} = 4^2 = 16$.

Ezek alapján a megoldás: $125 \cdot 16 = 2000$.

**63. Három csónakot bérel 11 tanuló: egy kétülésest, egy négyülésest és egy ötülésest. A beszállás során a csónakokon belüli elhelyezkedés közömbös.**

***a)*** **Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?**

***b)*** **Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló egy csónakba akar kerülni?**

Megoldás:

a) A 11 emberből először ki kell választanunk 2 - t, amit $\binom{11}{2}$ – féleképpen tehetünk meg. Ezt követően pedig a megmaradt 9 tanulóból kell kiválasztanunk még 4 - et, amit $\binom{9}{4}$ – féleképpen tehetünk meg. Végül a továbbra is várakozók kerülnek az ötüléses csónakba, amit egyféleképpen tehetnek meg.

Mivel ezek a választások függnek egymástól, így a megoldás: $\binom{11}{2} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5} = 6\,930$.

b) Három eset lehetséges: a két tanuló vagy a kétüléses, vagy a négyülésest, vagy az ötüléses csónakot választja.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a két tanuló a kétülésest választja. Ekkor a másik hajóba 9 ember közül kell kiválasztanunk 4 - et, amit $\binom{9}{4}$ – féleképpen tehetünk meg, és a többiek kerülnek a harmadik csónakba.

A második esetben a 9 emberből kell melléjük választanunk 2 – t, illetve a kétülésesbe pedig még 7 - ből 2 – t. Ezt összesen $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2}$ – féleképpen tehetjük meg.

A harmadik esetben a 9 emberből kell melléjük választanunk 3 - at, illetve a kétülésesbe pedig még 6 - ból 2 – t. Ezt összesen $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2}$ – féleképpen tehetjük meg.

Mivel a három eset egymástól független, így a megoldás:

$\binom{9}{4} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} = 2\,142$.

**64. Két 4 fős család (2 szülő, 2 gyerek) kirándulni megy, s egy 5 és egy 4 fős sátorban éjszakáznak. Hányféleképpen tehetik meg, ha mindkét sátorban lesz $1-1$ házaspár a gyerekekkel?**

Megoldás:
Két eset lehetséges: az 5 fős sátorba 2 vagy 3 gyermek kerül. Az első esetben a 4 gyerek közül 2 – t összesen $\binom{4}{2}=6$ – féleképpen, a második esetben pedig a 4 gyerek közül 3 – at összesen $\binom{4}{3}=4$ – féleképpen választhatunk ki.

Mivel mindkét esetben 2 – féleképpen helyezkedhetnek el a házaspárok a sátrakban, így a megoldás: $2\cdot 6+2\cdot 4=20$.

**65. Egy háromszög oldalainak hossza egész számok, s a kerülete $7\ cm$. A háromszög oldalai piros, kék és zöld színűek, mindegyik különböző festésű. Mennyi ilyen háromszög létezik?**

Megoldás:
A kerület miatt az oldalak hosszai csak a következő számhármasok lehetnek: $(1,1,5)$; $(1,2,4)$; $(1,3,3)$; $(2,2,3)$.

Ezen számhármasokból az első kettő nem lehetséges a háromszög - egyenlőtlenség alapján (bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál).

Mivel a másik két esetben egyenlő szárú háromszögeket kapunk, így csak az alap kiszínezése a fontos, amit $3-3$ – féleképpen tehetünk meg.

Ezek alapján a megoldás: $2\cdot 3=6$.

**66. Egy hegy csúcsára 6 út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha**

***a)* $1-1$ utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer?**

***b)* $1-1$ út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban?**

***c)* mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?**

Megoldás:

a) A felfele vezető úton 6 - ból kell kiválasztanunk 2 - t, s a kiválasztás során számít a sorrend, így ezt $V_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{6!}{4!}=30$ – féleképpen tehetjük meg.

Ezután lefele már csak 4 - ből választhatunk 2 - t, amit $V_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=12$ – féleképpen tehetünk meg.

Mivel a két választás függ egymástól, így a megoldás: $30\cdot 12=360$.

b) A felfele és lefele vezető úton is 6 lehetőség közül kell választanunk $2-2$ – t, így a megoldás: $30 \cdot 30 = 900$.

c) A felfele és lefele vezető úton ismét 6 útból kell választanunk $2-2$ – t, de most mindkét irányban ismétlődhetnek a választások, így ebben az esetben ismétléses variációval kell számolnunk, vagyis a megoldás: $6^2 \cdot 6^2 = 1\,296$.

**67. Egy filmklubban néhány film közül választanak ki 4 - et, amit majd meg fognak nézni. Hány film közül választanak, ha a választási lehetőségek száma 495?**

Megoldás:
Jelöljük az összes film számát $n$ – nel.

Írjuk fel a következő egyenletet: $\binom{n}{4} = 495$.

Átírás után azt kapjuk, hogy $\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495$, amiből a nevező eltüntetése után $(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = 11\,880$ adódik.

Ebből következik, hogy a $11\,880$ – at négy egymást követő szám szorzatára kell bontanunk, amit a prímtényezős felbontás segítségével oldhatunk meg:

$(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

Ezek alapján a megoldás: $n = 12$.

**68. Egy dobozban 2 darab fehér golyó van. Hány piros golyót kell a dobozba tenni, hogy az összes golyót kiválasztva a lehetséges sorrendek száma 21 legyen?**

Megoldás:
Tegyünk a dobozba $n$ darab piros golyót.

Ekkor az összes golyó lehetséges sorrendje: $P_{n+2}^{2,n} = \frac{(n+2)!}{2!\cdot n!} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

Írjuk fel a következő egyenletet: $\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = 21$.

Ebből a következő másodfokú egyenlet adódik: $n^2 + 3n - 40 = 0$.

A megoldóképlet segítségével azt kapjuk, hogy az egyenlet megoldásai $n_1 = -8$ és $n_2 = 5$.

Az $n_1$ értéke nem felel meg a feladat szövegének.

Ezek alapján 5 darab piros golyót kell a dobozba raknunk.

**69. Hányféleképpen választhatunk ki $1-200$ között három különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük osztható legyen 3 – mal?**

Megoldás:
A számok között $66$ darab osztható 3 – mal, $67$ – $67$ darab pedig $1$, illetve $2$ maradékot ad 3 – mal osztva. Összeadva 3 számot, az összeg akkor lesz osztható 3 – mal, ha 3 – mal osztva mindegyik ugyanazt a maradékot adja, vagy mindegyik különböző maradékot ad.

Először számítsuk ki azon lehetőségeknek a számát, amikor a maradékok különbözők: $\binom{66}{1}\cdot\binom{67}{1}\cdot\binom{67}{1}=296\,274$.

Ezután számítsuk ki azon lehetőségeknek a számát, amikor a maradékok megegyeznek: $\binom{66}{3}+\binom{67}{3}+\binom{67}{3}=141\,570$.

Ezek alapján a megoldás: $296\,274+141\,570=437\,844$.

**70. Két sakkozó, Anna és Bálint játszik egymás ellen a következő szabályok szerint: Minden győzelem esetén 1 pont jár a győztesnek és 0 pont a vesztesnek, míg döntetlen végeredménynél $0,5-0,5$ ponttal gazdagodnak a játékosok. Amennyiben valamelyik legfeljebb 6 játszmából több, mint 3 pontot szerez, akkor a játékot az első ilyen esetben befejezik, és az illető nyert. Ha az első hat játszma során ez nem következik be, akkor mindannyiszor két partit játszanak, míg valamelyikük több pontot szerez. Hányféleképpen jöhet létre a $3,5-2,5$ – es végeredmény?**

Megoldás:
Jelöljük Anna nyeréseit $A$ - val, Bálintét $B$ - vel és a döntetleneket pedig $D$ - vel.

Mivel összesen 6 pont lett a végére, ezért 6 játszmát játszottak. Az utolsó játszmát nem nyerhette Bálint, mert akkor már az ötödikben is meglett volna Annának a 3,5 pont és nem kerül sor a hatodik játszmára. Mivel a végeredmények nem egész számok, ezért azt is lehet tudni, hogy páratlan számú döntetlenek születtek.

Egy $D$ esetén 3 darab $A$ és 2 darab $B$ kell a végeredményhez. Amennyiben az utolsó meccs $D$ lett, úgy az első öt eredmény $P_5^{2,3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ – féleképpen alakulhatott. Abban az esetben, ha az utolsó $A$ lett, akkor az előző öt meccs $P_5^{1,2,2}=\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}=30$ – féleképpen végződhetett.

Három $D$ esetén 2 darab $A$ és 1 darab $B$ kell a végeredményhez. Amennyiben az utolsó meccs $D$ lett, úgy az első öt eredmény $P_5^{1,2,2}=\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}=30$ – féleképpen alakulhatott. Abban az esetben, ha az utolsó $A$, akkor az első öt meccs $P_5^{3,1,1}=\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}=20$ – féleképpen végződhetett.

Öt $D$ esetén 1 darab $A$ kell a végeredményhez. Amennyiben az utolsó meccs $D$ lett, úgy az első öt eredmény $P_5^{1,4}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}=5$ – féleképpen alakulhatott. Abban az esetben, ha az utolsó meccs $A$ lett, akkor az első öt meccs 1 – féleképpen végződhetett.

Ezek alapján a megoldás: $10+30+30+20+5+1=96$.

**71. A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a BIOLÓGIA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **B** | **I** | **O** | **L** | **Ó** |
| **I** | **O** | **L** | **Ó** | **G** |
| **O** | **L** | **Ó** | **G** | **I** |
| **L** | **Ó** | **G** | **I** | **A** |

Megoldás:
Az ilyen típusú feladatokat kétféleképpen is megoldhatjuk.

Először tekintsük azt a megoldást, amikor a betűk helyére olyan számokat írunk, melyek azt jelölik, hogy az adott betűhöz összesen hányféleképpen juthatunk el. Az ábra kitöltésénél azt kell észrevennünk, hogy a felső és szélső számok helyére rendre $1$ - es kerül, míg egy „belső” szám a felette levő szám és a tőle balra álló szám összegeként adódik, mert azokból léphetünk az adott mezőre. A helyes kitöltés tehát a következő:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | **3** | **6** | **10** | **15** |
| **1** | **4** | **10** | **20** | **35** |

Ezek alapján az $A$ betűnél található szám a megoldás, vagyis a BIOLÓGIA szó összesen $35$ - féleképpen olvasható ki az ábrából a feltételnek megfelelően.

Egy másik megoldás lehet, ha észrevesszük, hogy a kezdőbetűtől az $A$ betűig $7$ lépésünk lesz minden kiolvasás során. Továbbá az is látható, hogy minden ilyen $7$ lépéses sorozatban kell lenni $4$ darab jobbra (jelöljük ezt $J$ – vel) és $3$ darab lefele (jelöljük ezt $L$ – lel) lépésnek. Ezek alapján a $4$ darab $J$ – t és $3$ darab $L$ – t összesen $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ – féleképpen tehetjük sorba.

Az utóbbi módszerrel ellenőrizhetjük a táblázatba írt többi szám helyességét is.

**72. A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a VONALZÓ szót, ha minden lépésnél csak balra lefele vagy jobbra lefele haladhatunk?**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | V | | | |
| | | O | | O | | |
| | N | | N | | N | |
| A | | A | | A | | A |
| | L | | L | | L | |
| | | Z | | Z | | |
| | | | Ó | | | |

Megoldás:
A kezdőbetűtől az Ó betűig 6 lépésünk lesz minden kiolvasás során, ahol minden ilyen 6 lépéses sorozatban kell lenni 3 darab jobbra (jelöljük ezt $J$ – vel) és 3 darab balra (jelöljük ezt $B$ – vel) lépésnek lefele. Ezek alapján a 3 darab $J$ – t és 3 darab $B$ – t összesen $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ – féleképpen tehetjük sorba, vagyis $20$ – féleképpen olvasható ki a VONALZÓ szó a feltételnek megfelelően.

A táblázat számokkal való kitöltése után szintén ezt az értéket kapjuk:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | | | |
| | | 1 | | 1 | | |
| | 1 | | 2 | | 1 | |
| 1 | | 3 | | 3 | | 1 |
| | 4 | | 6 | | 4 | |
| | | 10 | | 10 | | |
| | | | 20 | | | |

**73. A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a TÉGLALAP szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | É | G | L | A | L | A | P |
| É | G | L | A | L | A | P | |
| G | L | A | L | A | P | | |
| L | A | L | A | P | | | |
| A | L | A | P | | | | |
| L | A | P | | | | | |
| A | P | | | | | | |
| P | | | | | | | |

Megoldás:
A legfelső és legalsó $P$ betűhöz egyaránt $1$ – féleképpen juthatunk el. A második és hetedik sorban levő $P$ betűhöz $\frac{7!}{1! \cdot 6!} = 7$, a harmadik és hatodik sorban levő $P$ betűhöz $\frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$, a negyedik és ötödik sorban levő $P$ betűhöz $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ – féleképpen juthatunk el a kezdőbetűtől.

Ezek alapján összesen $2 \cdot (1 + 7 + 21 + 35) = 128$ – féleképpen olvashatjuk ki az ábrából a TÉGLALAP szót a feltételnek megfelelően.

A táblázat számokkal való kitöltése után ellenőrizhetjük a megoldást.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | | | | |
| 1 | 6 | 21 | | | | | |
| 1 | 7 | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |

**74. A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a PARALELEPIPEDON szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | A | R | A | L | | | | |
| A | R | A | L | E | | | | |
| R | A | L | E | L | | | | |
| A | L | E | L | E | | | | |
| | | | | P | I | P | E | D |
| | | | | I | P | E | D | O |
| | | | | P | E | D | O | N |

Megoldás:
Célszerű előbb kiszámolnunk azt, hogy külön – külön a két téglalapból hányféleképpen tudjuk kiolvasni a PARALELE, illetve a PIPEDON szavakat. Az első szó kiolvasásához 7 lépésre van szükségünk, ahol lesz 3 lefele (jelöljük ezt $L$ – lel) és 4 jobbra (jelöljük ezt $J$ – vel), így ezt $\frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$ – féleképpen tehetjük meg. A második szó esetében 6 lépésünk lesz, s ezúttal 2 darab $L$ - t és 4 darab $J$ – t kell sorba raknunk, amit $\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$ – féleképpen tehetünk meg. Mivel a két kiolvasás függ egymástól, vagyis minden első téglalapbeli kiolvasáshoz tartozik egy második téglalapbeli kiolvasás, így a megoldás $35 \cdot 15 = 525$, vagyis $525$ – féleképpen olvashatjuk ki az ábrából a PARALELEPIPEDON szót a feltételnek megfelelően.

A táblázat kitöltésénél a számok itt is adódnak a felettük és a balról előttük álló számok összegéből, így a második téglalap felső és szélső számai rendre megegyeznek az első téglalap jobb alsó sarkában lévő számával.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | | | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | | |
| | | | | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 |
| | | | | 35 | 70 | 105 | 140 | 175 |
| | | | | 35 | 105 | 210 | 350 | 525 |

**75. Hányféleképpen olvasható ki a VARIÁCIÓ szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | V | | | | | | | |
| | | | | | | A | A | A | | | | | | |
| | | | | | R | R | R | R | R | | | | | |
| | | | | I | I | I | I | I | I | I | | | | |
| | | | Á | Á | Á | Á | Á | Á | Á | Á | Á | | | |
| | | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | | |
| | I | I | I | I | I | I | I | I | I | I | I | I | I | |
| Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó | Ó |

Megoldás:

Mivel minden lépésnél 3 lehetőségből választhatunk, így a megoldás: $V_3^{8,ism} = 3^8 = 6561.$

**76. Hányféleképpen lehet kiolvasni az FELADATGYŰJTEMÉNY szót, ha minden lépésnél csak jobbra vagy lefelé lehet haladni?**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | E | L | A | D | A | T | G | Y | Ű |
| E | L | A | D | A | T | G | Y | Ű | J |
| L | A | D | A | T | G | | Ű | J | T |
| A | D | A | T | G | Y | Ű | J | T | E |
| D | A | T | G | Y | Ű | J | T | E | M |
| A | T | G | Y | Ű | J | T | E | M | É |
| T | G | Y | Ű | J | T | E | M | É | N |
| G | Y | Ű | J | T | E | M | É | N | Y |

Megoldás:

Először számítsuk ki azt, amikor a sötétített mezőn is áthaladhatunk. Ekkor 16 lépés lesz, amiből 9 jobbra és 7 lefele. A 9 $J$ és 7 $L$ összes sorbarendezésének száma: $\frac{16!}{9! \cdot 7!} = 11\,440$.

Most tekintsük azokat az eseteket, amikor mindenképpen áthaladunk a sötétített mezőn.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | E | L | A | D | A | T | | | |
| E | L | A | D | A | T | G | | | |
| L | A | D | A | T | G | | Ű | J | T |
| | | | | | | Ű | J | T | E |
| | | | | | | J | T | E | M |
| | | | | | | T | E | M | É |
| | | | | | | E | M | É | N |
| | | | | | | M | É | N | Y |

Ekkor a kiolvasások száma: $\frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 1\,568$.

Ezek alapján a megoldás: $11\,440 - 1\,568 = 9\,872$.

**77. Hányféleképpen olvasható ki a DEBRECENI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | D | | | | |
| | | | E | E | E | | | |
| | | B | B | B | B | B | | |
| | R | R | R | R | R | R | R | |
| E | E | E | E | E | E | E | E | E |
| | C | C | C | C | C | C | C | |
| | | E | E | E | E | E | | |
| | | | N | N | N | | | |
| | | | | I | | | | |

Megoldás:
Ebben a feladatban nem tudunk minden mezőről 3 – féleképpen továbbhaladni, hanem van ahol csak 1, illetve 2 lehetőségünk van erre. Összesen 8 lépésre lesz szükségünk, s mivel a kezdő és utolsó betű a szimmetriatengelyen helyezkedik el, így a balra $(B)$ és jobbra $(J)$ lépéseknek a száma megegyezik. Tekintsük a következő lehetőségeket:

Első esetben 8 darab $F$ (függőleges) - et 1 - féleképpen rakhatunk sorba.

Második esetben, ha 1 darab $B$ és 1 darab $J$ betűnk van, akkor 6 darab $F$ - et kell még hozzávennünk. Ezeket összesen $\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 6!} = 56$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Harmadik esetben 2 darab $B$ és 2 darab $J$ áll rendelkezésünkre, s ekkor 4 darab $F$ - et kell még felhasználnunk. Ezeket összesen $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 4!} = 420$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Negyedik esetben 3 darab $B$ és 3 darab $J$ van a sorban, s ekkor 2 darab $F$ - et kell még felhasználnunk. Ezeket összesen $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$ – féleképpen rakhatjuk le sorba.

Ötödik esetben 4 darab $B$ és 4 darab $J$ áll rendelkezésünkre s ekkor 1 darab $F$ - et kell még felhasználnunk. Ezeket összesen $\frac{8!}{4! \cdot 4! \cdot 1!} = 70$ – féleképpen rakhatjuk le sorba.

Ezek alapján a megoldás: $1 + 56 + 420 + 560 + 70 = 1107$.

**78. Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az ABRAKADABRA szó összes betűinek felhasználásával, ha az A betűk nem kerülhetnek egymás mellé?**

Megoldás:
A fennmaradó betűket $P_6^{1,1,2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 180$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Ezt követően az 5 darab $A$ betűt helyezzük el a feladatnak megfelelően: a lerakott betűk által meghatározott 7 helyből (elől, hátul, közöttük) válasszunk ki 3 – at: $\binom{7}{5} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$.

Ezek alapján a megoldás: $180 \cdot 21 = 3780$.

**79. Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a SZERENCSÉS szó összes betűinek felhasználásával, ha az E és S betűk nem kerülhetnek egymás mellé?**

Megoldás:
A fennmaradó betűket $P_5 = 5! = 120$ – féleképpen rakhatjuk sorba.

Ezt követően az 5 darab betűt helyezzük el a feladatnak megfelelően: a lerakott betűk által meghatározott 6 helyből (elől, hátul, közöttük) válasszunk ki 5 – öt: $\binom{6}{5} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6$.

A lerakott 2 darab E és 3 darab S betűk összes lehetséges sorrendjének száma: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

Ezek alapján a megoldás: $120 \cdot 6 \cdot 10 = 7200$.

**80. Mennyi 0 – ra végződik az $200$! értéke?**

Megoldás:
A $0$ – k számát az határozza meg, hogy a prímtényezős felbontásban mennyi $2$ – es, illetve $5$ – ös szerepel. Mivel biztosan több $2$ – es lesz, így elegendő meghatározni az $5$ – ösök számát.

Minden ötödik szám miatt lesz $1$ darab $5$ – ös, de a $25; 50; 75; 100; 150; 175; 200$ és a $125$ számok miatt további 1, illetve 2 darab is szerepelni fog.

Ebből azt kapjuk, hogy az ötösök száma: $40 + 7 + 2 = 49$.

Ezek alapján a kifejezés értéke osztható $2^{49} \cdot 5^{49} = 10^{49}$ – el, vagyis 49 darab 0 – ra végződik.

**81. Írd fel az $(a + 2b)^4$ hatványt összeg alakban!**

Megoldás:
A kifejezés felbontásához alkalmazzuk a binomiális – tételt:

$$(a + 2b)^4 =$$

$$= \binom{4}{0} \cdot a^4 \cdot (2b)^0 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot (2b)^1 + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (2b)^2 + \binom{4}{3} \cdot a^1 \cdot (2b)^3 + \binom{4}{4} \cdot a^0 \cdot (2b)^4 =$$

$$= a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

**82. Mennyi lesz az $x^4$ együtthatója a $(3x+2)^{10}$ kifejezésben, ha elvégezzük a hatványozást és az összevonásokat?**

Megoldás:
A binomiális – tétel szerint írjuk fel a következőt:

$(3x+2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot (3x)^{10-k} \cdot 2^k$.

Ebből $k = 6$ esetén kapjuk az $x^4$ – t tartalmazó tagot, s ekkor az együtthatója:

$\binom{10}{6} \cdot 3^4 \cdot 2^6 = 1\ 088\ 640$.

**83. Határozd meg az $\left(\frac{a}{b} - \sqrt{b}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját!**

Megoldás:
A binomiális – tétel szerint írjuk fel a következőt:

$\left(\frac{a}{b} - \sqrt{b}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{16-k} \cdot \left(\sqrt{b}\right)^k \cdot (-1)^k$.

Ezek alapján a középső tag, vagyis $k = 8$ esetén a következőt kapjuk:

$\binom{16}{8} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{16-8} \cdot \left(\sqrt{b}\right)^8 \cdot (-1)^8 = 12870 \cdot \frac{a^8}{b^4}$.

**84. Az $\left(x^2 + \sqrt{x}\right)^n$ binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja $15x^9$. Mekkora az $n$ kitevő? Add meg a kifejezés utolsó előtti tagját!**

Megoldás:
A binomiális – tétel szerint írjuk fel a következőt: $\left(x^2 + \sqrt{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x^2)^{n-k} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^k$.

Ebből a harmadik tag, vagyis a $k = 2$ esetén a következőt kapjuk:

$\binom{n}{2} \cdot (x^2)^{n-2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 = \binom{n}{2} \cdot x^{2n-3}$.

Ekkor felírhatjuk a következőt: $x^{2n-3} = x^9$ és $\binom{n}{2} = 15$.

Mindkét egyenletből azt kapjuk, hogy $n = 6$.

Ezek alapján az utolsó előtti tag, vagyis $k = 5$ esetén: $\binom{6}{5} \cdot (x^2)^{6-5} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^5 = 6 \cdot \sqrt{x^9}$.

**85. Oldd meg a következő egyenleteket!**

***a)*** $\boldsymbol{\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{2} = 0}$

***b)*** $\boldsymbol{C_{n+1}^4 + C_n^4 - 2 \cdot C_n^2 = 0}$

***c)*** $\boldsymbol{V_n^{5,ism} + V_n^{4,ism} = 72 \cdot V_n^{3,ism}}$

Megoldás:

a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{2} = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ Feltétel: $n \geq 2$.

$$\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{[n-(n-1)]! \cdot (n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 0$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = 0$$

$$n + n - \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 0$$

$$n^2 - 5n = 0$$

$n_1 = 0$ és $n_2 = 5$

Az $n_1 = 0$ nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $n = 5$.

b) $C_{n+1}^4 + C_n^4 - 2 \cdot C_n^2 = 0$

$\binom{n+1}{4} + \binom{n}{4} - 2 \cdot \binom{n}{2} = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ Feltétel: $n \geq 4$.

$$\frac{(n+1)!}{[(n+1)-4]! \cdot 4!} + \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} - 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 0$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-3)! \cdot 24} + \frac{n!}{(n-4)! \cdot 24} - \frac{n!}{(n-2)!} = 0$$

$$(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) - 24n \cdot (n-1) = 0$$

$$(n-1) \cdot n \cdot [(n+1) \cdot (n-2) + (n-2) \cdot (n-3) - 24] = 0$$

$$(n-1) \cdot n \cdot (2n^2 - 6n - 20) = 0$$

Egy szorzat értéke csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből az egyenlet megoldásai: $n_1 = 0; n_2 = 1; n_3 = -2$ és $n_4 = 5$.

Az $n_1 = 0; n_2 = 1$ és $n_3 = -2$ nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $n = 5$.

c) $V_n^{5,ism} + V_n^{4,ism} = 72 \cdot V_n^{3,ism}$ $\quad\rightarrow\quad$ Feltétel: $n \geq 1$

$n^5 + n^4 = 72 \cdot n^3$

$n^3 \cdot (n^2 + n - 72) = 0$

Egy szorzat értéke csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből az egyenlet megoldásai: $n_1 = 0; n_2 = -9$ és $n_3 = 8$.

Az $n_1 = 0$ és $n_2 = -9$ nem felel meg a feltételnek, vagyis a megoldás: $n = 8$.

**86. Igazold a következő összefüggést: $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \binom{11}{7}$!**

Megoldás:
Alakítsuk át a binomiális együtthatókat, majd vonjuk össze a kapott törteket:

$$\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10! \cdot 7}{7! \cdot 4!} + \frac{10! \cdot 4}{7! \cdot 4!} = \frac{10! \cdot 7! + 10! \cdot 4}{7! \cdot 4!} = \frac{10! \cdot (7+4)}{7! \cdot 4!} = \frac{10! \cdot 11}{7! \cdot 4!} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \binom{11}{7}$$

**87. Bizonyítsd be a következő azonosságot: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$!**

Megoldás:
Alakítsuk át az egyenlőség jobb oldalát a következőképpen:

$$\frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \cdot (k-1)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$